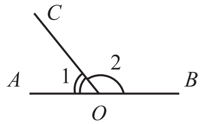
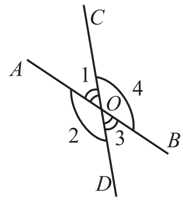
1. ПЛАНИМЕТРИЯ

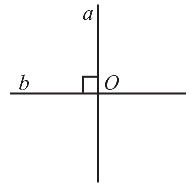
1.1 Свойства углов



$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$
смежные углы



$\angle 1 = \angle 3, \ \angle 2 = \angle 4$
вертикальные углы

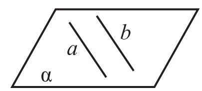


$\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ;\ a \perp b$
перпендикулярные прямые

1.2 Параллельные прямые

Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

Если $a \in \alpha$, $b \in \alpha$, $a \nparallel b$, то $a \parallel b$

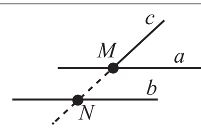


Аксиома параллельных прямых:
через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Следствие:

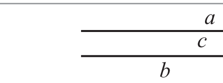
1. Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую.

Если $a \parallel b$, $a \cap c = M$, то $b \cap c = N$.



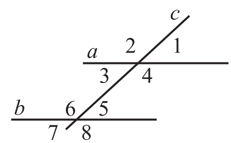
2. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны друг другу.

Если $a \parallel c$ и $b \parallel c$, то $a \parallel b$.



Свойства параллельных прямых

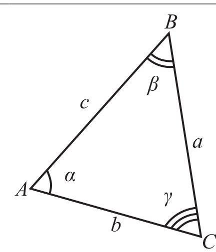
$\angle 1 = \angle 5$ (соответственные углы)
$\angle 3 = \angle 5$ (внутренние накрест лежащие углы)
$\angle 2 = \angle 8$ (внешние накрест лежащие углы)
$\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$ (односторонние углы)



1.3 Треугольники

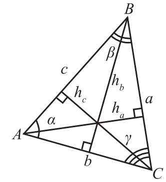
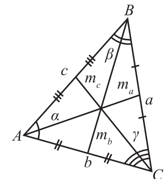
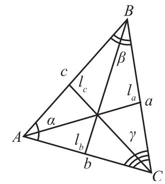
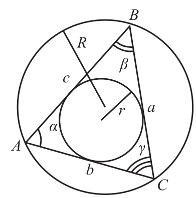
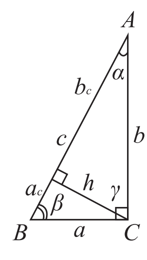
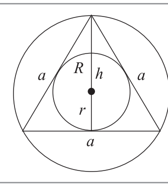
Стандартные обозначения

A, B, C - вершины;
α, β, γ - углы;
a, b, c - стороны, противолежащие углам α, β, γ (вершинам A, B, C) соответственно;
h_a, h_b, h_c - высоты, опущенные на стороны a, b, c соответственно;
m_a, m_b, m_c - медианы;
l_a, l_b, l_c - биссектрисы;
R - радиус описанной окружности;
r - радиус вписанной окружности;
p - полупериметр; S - площадь.

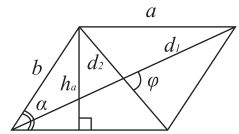
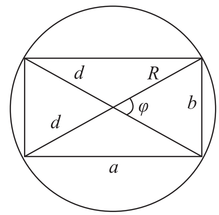
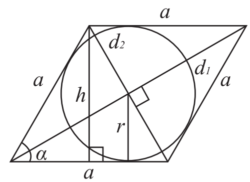
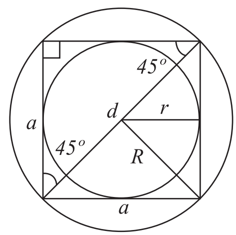
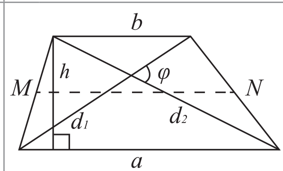
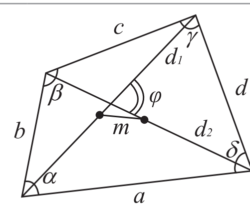


Полупериметр

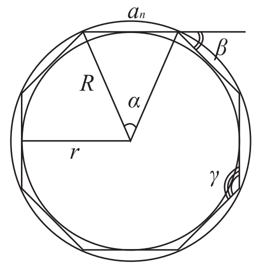
$$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

Высота **Отношения сторон и высот**	$h_a^2=\dfrac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}$ $h_a:h_b:h_c=\dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{b}:\dfrac{1}{c}$	Три высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке.	
Медиана	$m_a^2=\dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$	Три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2:1, считая от вершины.	
Биссектриса	$l_a^2=\dfrac{bc((b+c)^2-a^2)}{(b+c)^2}$	Три биссектрисы пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник.	
Теорема косинусов	$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$	**Теорема синусов**	$\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$
Площадь произвольного треугольника	$S=\dfrac{1}{2}ah_a=\dfrac{1}{2}bh_b=\dfrac{1}{2}ch_c$ $S=\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma=\dfrac{1}{2}ac\sin\beta=\dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\quad где\ p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$ $S=pr,\ S=\dfrac{abc}{4R}$		
Решение прямоугольного треугольника	$a=c\sin\alpha,\ b=c\cos\alpha$ $a=b\,tg\alpha,\ b=a\,ctg\alpha$ $c=\dfrac{a}{\sin\alpha},\ c=\dfrac{b}{\cos\alpha}$ $\dfrac{a_c}{a}=\dfrac{a}{c},\ \dfrac{b_c}{b}=\dfrac{b}{c},\ \dfrac{b_c}{h}=\dfrac{h}{a_c}$		
Теорема Пифагора	$c^2=a^2+b^2\quad(\angle C=90^0)$		
Площадь прямоугольного треугольника	$S=\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{1}{2}hc\quad(\angle C=90^0)$		
Равносторонний треугольник	$S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4},\ h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ $R=2r,\ R=\dfrac{a\sqrt{3}}{3},\ r=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$		

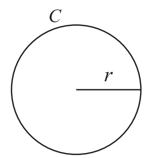
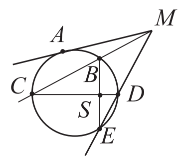
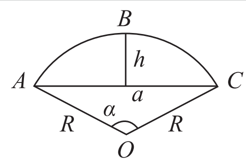
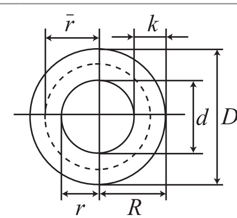
1.4 Четырехугольники

Параллелограмм	$S = ah_a = bh_b$ $S = ab\sin\alpha$ $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$ $P = 2(a+b)$ $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2+b^2)$	
Прямоугольник	$S = ab = \frac{1}{2}d^2 \sin\varphi$ $R = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ $P = 2(a+b)$	
Ромб	$S = ah = a^2\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1 d_2$ $d_1 = 2a\cos\frac{\alpha}{2}$ $d_2 = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$ $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$ $r = \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}a\sin\alpha$ $P = 4a$	
Квадрат	$S = a^2 = \frac{1}{2}d^2$ $P = 4a$ $d = a\sqrt{2}$ $R = \frac{1}{2}d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ $r = \frac{1}{2}a$	
Трапеция	$S = \frac{a+b}{2}h = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$ $MN = \frac{1}{2}(a+b)$ (средняя линия)	
Произвольный выпуклый четырехугольник	$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360^0$, где $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ - внутренние углы четырехугольника. $a^2+b^2+c^2+d^2 = d_1^2+d_2^2+4m^2$, где m – отрезок, соединяющий середины диагоналей. $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$	

1.5 Правильные n-угольники

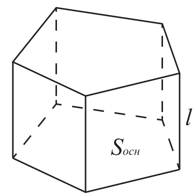
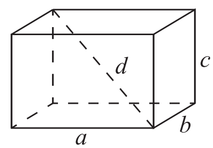
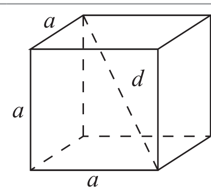
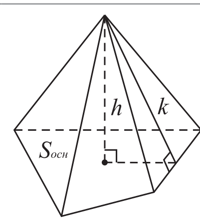
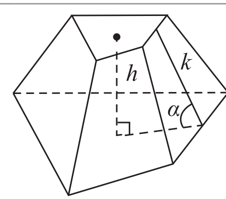
Центральный угол	$\alpha = \dfrac{360^0}{n}$	
Внешний угол	$\beta = \dfrac{360^0}{n}$	
Внутренний угол	$\gamma = 180^0 - \beta$	
Сторона	$a_n = 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2R\sin\dfrac{\alpha}{2} = 2r\,tg\dfrac{\alpha}{2}$	
Радиусы описанной и вписанной окружностей	$R = \dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$ $\qquad r = \dfrac{a_n}{2tg\dfrac{\alpha}{2}}$	
Площадь	$S = \dfrac{1}{2}n\,a_n r = nr^2 tg\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}nR^2\sin\alpha = \dfrac{1}{4}na_n^2 ctg\dfrac{\alpha}{2}$	

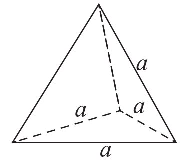
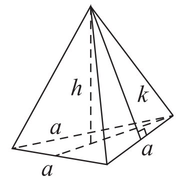
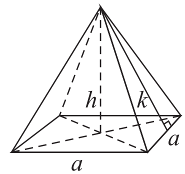
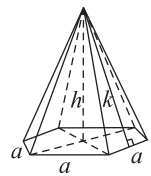
1.6 Окружность и круг

Длина окружности	$C = 2\pi\, r = \pi\, d$	
Длина дуги, равной *n*°	$L = \dfrac{\pi\, r}{180^0}n^0$	
Площадь круга	$S = \pi\, r^2 = \pi\dfrac{d^2}{4} = \dfrac{Cd}{4}$	
Свойства хорд, секущих и касательной	$BS \cdot ES = CS \cdot DS$ $MB \cdot MC = MD \cdot ME$ $MA^2 = MB \cdot MC = MD \cdot ME$	
Сегмент и сектор	$a = 2R\sin\dfrac{\alpha}{2}$ $h = \dfrac{a}{2}tg\dfrac{\alpha}{4}$ $S_{OABC} = \dfrac{1}{2}R^2\alpha$ (площадь сектора) $S_{ABC} = S_{OABC} - S_{OAC}$	
Площадь кругового кольца	$S = \pi(R^2 - r^2) = \dfrac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = 2\pi\bar{r}k$, где R, r - внешний и внутренний радиусы, D, d - внешний и внутренний диаметры, $\bar{r}$ - средний радиус, k - ширина кольца.	

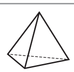
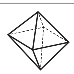
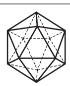
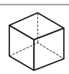
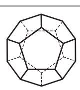
2. СТЕРЕОМЕТРИЯ

2.1 Многогранники

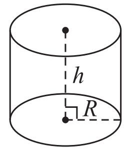
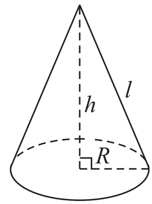
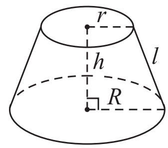
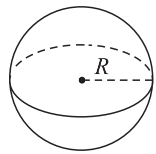
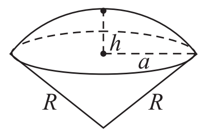
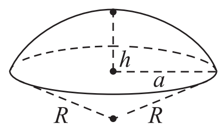
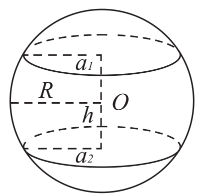
<table>
<tr><td>Стандартные обозначения</td><td colspan="3">V – объем;
$S_{полн}$ - площадь полной поверхности;
$S_{бок}$ - площадь боковой поверхности;
$S_{осн}$ - площадь основания;
$P_{осн}$ - периметр основания;
$P_{\perp}$ - периметр перпендикулярного сечения;
l - длина ребра;
h - высота;
k - апофема.</td></tr>
<tr><td>Призма</td><td colspan="2">$S_{бок} = P_{\perp} l$
$S_{полн} = 2S_{осн} + S_{бок}$
$V = S_{осн} h$
<u>прямая призма:</u>
$S_{бок} = P_{осн}\ (l = h)$
$V = S_{осн} l$</td><td></td></tr>
<tr><td>Параллелепипед</td><td colspan="2">$S_{полн} = 2(ab + bc + ac)$
$V = abc$
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$</td><td></td></tr>
<tr><td>Куб</td><td colspan="2">$S_{полн} = 6a^2$
$V = a^3$
$d^2 = 3a^2$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Пирамида</td><td colspan="2">$V = \frac{1}{3} S_{осн} h$</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>Радиус описанной сферы</td><td>$R = \frac{3}{4} h$</td></tr>
<tr><td>Радиус вписанной сферы</td><td>$r = \frac{1}{4} h$</td></tr>
<tr><td>Усеченная пирамида</td><td colspan="2">$V = \frac{1}{3} h(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$,
где S_1 и S_2 – площади оснований.
$S_{бок} = \frac{S_1 - S_2}{\cos\alpha}$,
где α - двугранный угол при ребре нижнего основания.</td><td></td></tr>
</table>

Тетраэдр	$S_{бок}=\frac{3a^2}{4}\sqrt{3}$ $S_{полн}=a^2\sqrt{3}$ $V=\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$	
Правильная треугольная пирамида	$S_{бок}=\frac{3}{2}ak$ $S_{полн}=\frac{a}{4}(a\sqrt{3}+6h)$ $V=\frac{a^3h}{4\sqrt{3}}$	
Правильная четырехугольная пирамида	$S_{бок}=2ak$ $S_{полн}=a(a+2k)$ $V=\frac{1}{3}a^2h$	
Правильная шестиугольная пирамида	$S_{бок}=3ak$ $S_{полн}=\frac{3}{2}a(a\sqrt{3}+2k)$ $V=\frac{a^2}{2}h\sqrt{3}$	
Формула Эйлера	$N-L+F=2$, где N – число вершин, L – число ребер, F – число граней выпуклого многогранника.	

Правильные многогранники

		Число сторон у грани	Число рёбер, примыкающих к вершине	Число вершин	Число рёбер	Число граней	Площадь поверхности	Объем
	Тетраэдр	3	3	4	6	4	1,73 a^2	0,12 a^3
	Октаэдр	3	4	6	12	8	3,46 a^2	0,47 a^3
	Икосаэдр	3	5	12	30	20	8,66 a^2	2,18 a^3
	Гексаэдр или куб	4	3	8	12	6	6 a^2	a^3
	Додекаэдр	5	3	20	30	12	20,64 a^2	7,66 a^3

2.2 Тела вращения

Цилиндр	$S_{бок} = 2\pi R h$ $S_{полн} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$ $V = \pi R^2 h$	
Конус	$S_{бок} = \pi R l$ $S_{полн} = \pi R(R+l)$ $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$	
Усеченный конус	$S_{бок} = \pi l(R+r)$ $S_{полн} = S_{бок} + \pi(R^2+r^2)$ $V = \dfrac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2)$	
Шар	$S_{сферы} = 4\pi R^2 = \pi d^2$ $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{\pi d^3}{6}$	
Шаровой сектор	$a^2 = h(2R-h)$ $S_{бок} = \pi R a$ $S_{полн} = \pi R(2h+a)$ $V = \dfrac{2\pi R^2 h}{3}$	
Шаровой сегмент	$a^2 = h(2R-h)$ $S_{бок} = 2\pi R h = \pi(a^2+h^2)$ $S_{полн} = \pi(2Rh+a^2) = \pi(h^2+2a^2)$ $V = \pi h^2\left(R - \dfrac{h}{3}\right)$	
Шаровой пояс (слой)	$S_{бок} = 2\pi R h$ $S_{полн} = \pi(2Rh + a_1^2 + a_2^2)$ $V = \dfrac{1}{6}\pi h^3 + \dfrac{1}{2}\pi(a_1^2+a_2^2)h$	

2.3 Векторы

Вектором называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек). К векторам относится также и *нулевой вектор*, начало и конец которого совпадают.	
Координаты вектора с началом в точке $A(x_1, y_1, z_1)$ **и концом в точке** $B(x_2, y_2, z_2)$	$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$
Координаты суммы векторов $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ **и** $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$	$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
Законы сложения векторов	$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ $\vec{a} + 0 = \vec{a}$ $\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}$
Законы умножения векторов	$(\lambda\mu) \cdot \vec{a} = \lambda(\mu \vec{a})$ $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$ $\lambda\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$ $\vec{a} \cdot 0 = \lambda \vec{0} = \vec{0}$
Координаты произведения вектора на число	$\lambda \cdot \vec{a}(x_1, y_1, z_1) = \vec{c}(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$
Скалярное произведение векторов $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ **и** $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = \lvert \vec{a} \rvert \cdot \lvert \vec{b} \rvert \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$
Свойства скалярного произведения	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ $\vec{a} \cdot \vec{a} > 0$ $\vec{a} \cdot \vec{a} = \lvert \vec{a} \rvert^2$ $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
Длина вектора $\vec{a}(x, y, z)$	$\lvert \vec{a} \rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
Косинус угла между векторами $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ **и** $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$	$\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert \vec{a} \rvert \cdot \lvert \vec{b} \rvert} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$
Два ненулевых вектора называются *коллинеарными*, если они сонаправлены или противоположно направлены. Нулевой вектор считается *коллинеарным* любому вектору. Ненулевые векторы называются *комланарными*, если они параллельны одной и той же плоскости. Коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны.	